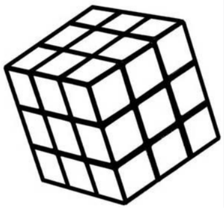


Summer Math Camp
[numero 16]

Tarvisio
20-24 agosto 2024

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra `0000` e `9999`, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi `0000`.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di `9999`, se ne indichino le ultime 4.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori appprossimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \pi = 3.1416$$

Scadenze Importanti

- 30 minuti dall'inizio: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- 60 minuti dall'inizio: termine della gara.

I Problemi.

- **Problema 1.**
Il cubo di Rubik 3x3x3 è composto da 26 cubetti esterni ed un cubetto interno. In un cubo di Rubik 10x10x10 quanti sono i cubetti esterni?

- **Problema 2.**
Gli 8 cubetti d'angolo di un cubo di Rubik 3x3x3 sono correttamente posizionati ma non correttamente orientati. Quante sono le possibili configurazioni degli 8 cubetti d'angolo?

- **Problema 3.**
Quanti elementi ha il gruppo di simmetria (rotazioni, riflessioni,...) del triangolo equilatero?

- **Problema 4.**
Quanti sono i sottogruppi del gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$?

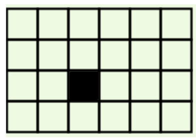
- **Problema 5.**
Quanti cubi distinti si possono ottenere dipingendo le facce o di bianco o di nero? Cubi che si possono ottenere tramite rotazioni sono da considerare equivalenti.

- **Problema 6.**
Risolvi l'equazione $n! + 1 = m^2$ con n intero positivo e minore di 11. Come risposta scrivi la somma di tutti gli elementi delle coppie (n, m) soluzioni dell'equazione.

- **Problema 7.**
Quante sono le configurazioni possibili del Pocket Cube (2x2x2)? La soluzione si può scrivere come $a! \cdot b^c$ con $a > b$. Come risposta indicare $a + b + c$.

- **Problema 8.**
Il solido in figura, composto da cubetti, è attraversato da sei tunnel. Ogni tunnel attraversa completamente il solido perpendicolarmente a una coppai di facce. Da quanti cubetti è composto il solido?

Problema 8



Problema 9

- **Problema 9.**
Quanti rettangoli, formati da quadratini della griglia, contengono la casella nera nella figura sopra?

- **Problema 10.** Il cubo di Rubik ha 20 pezzi mobili (8 vertici, 12 spigoli, i 6 centri non sono mobili). Quanti pezzi mobili hanno insieme il *Piraminx* (versione tetraedrica del cubo di Rubik) e il *Megaminx* (versione dodecaedrica del cubo di Rubik)?

Le Soluzioni.

- ***Problema 1.*** *Risposta **0488**.*
Ci sono $10^3 = 1000$ cubetti in totale. I cubetti interni sono $8^3 = 512$. La differenza è 488.

- ***Problema 2.*** *Risposta **2186**.*
Ciascun cubetto d'angolo ha tre possibili orientazioni, Solo sette cubetti possono essere orientati indipendentemente. In totale le configurazioni sono $3^7 - 1 = 2186$.

- ***Problema 3.*** *Risposta **0006**.*
Il gruppo di simmetria del triangolo equilatero ha sei elementi: è costituito dall'identità, dalle rotazioni di 120° e di 240° rispetto al suo centro e dalle tre riflessioni rispetto ai suoi tre assi.

- ***Problema 4.*** *Risposta **0006**.*
I sottogruppi sono 6: $H_1 = \{0\}, H_2 = \{0, 6\}, H_3 = \{0, 4, 8\}, H_4 = \{0, 3, 6, 9\}, H_5 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $\mathbb{Z}_{12}$.

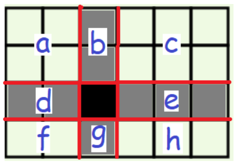
- ***Problema 5.*** *Risposta **0010**.*
Numero cubi (NC) con 0 facce bianche (B), ovvero 6 nere (N) = 1. NC con 1 faccia B, ovvero 5 N = 1.
NC con 2 facce B, ovvero 4 N = 2. [2 facce opposte o due facce con uno spigolo in comune]
NC con 3 facce B, ovvero 3 N = 2. [3 facce con un vertice in comune o due facce opposte e un'altra faccia]
NC con 4 facce B, ovvero 2 N = 2. NC con 5 facce B, ovvero 1 N = 1.
NC con 6 facce B, ovvero 0 N = 1. In totale i cubi sono 10.

- ***Problema 6.*** *Risposta **0103**.*
Ci sono tre soluzioni, ovvero le coppie $(4, 5), (5, 11)$ e $(7, 71)$ (vedi Problema di Brocard).

- ***Problema 7.*** *Risposta **0016**.*
Le permutazioni degli 8 angoli sono in totale 8! e 7 dei cubi possono essere indipendentemente ruotati in 3^7 posizioni. Non c'è nulla che fissa l'orientamento del cubo nello spazio e questo riduce le posizioni di un fattore 24 (6×4 poiché sei sono le facce che possono stare in alto e 4 quelle davanti). Quindi il numero di permutazioni possibile è:
$$\frac{8! \cdot 3^7}{24} = 7!\, 3^6 = 3674160$$
La risposta è $7 + 3 + 6 = 16$.

- ***Problemi 8.*** *Risposta **0044**.*
Senza i tunnel ci sono $4^3 = 64$ cubetti. Due terne di tunnel si incontrano esattamente nello stesso cubetto interno. Complessivamente ci sono $6 \cdot 3 + 2 = 20$ cubetti che formano i tunnel. Risposta $64 - 20 = 44$.

- ***Problema 9.*** *Risposta **0072**.*



Il numero di rettangoli contenuti in rettangolo $n \times m$ è
$$NR(n, m) = C(n + 1, 2) \times C(m + 1, 2) = \frac{n(n + 1)}{2} \cdot \frac{m(m + 1)}{2}$$
Dividiamo il rettangolo nei rettangolini a, b, c, d, e, f, g, h e calcoliamo il numero di rettangoli che *non* contengono il quadratino nero prestando attenzione a non contare i rettangolini due volte. Quindi dovremo sommare il numero di rettangolini ottenuti nei rettangoli abc, fgh, adf, ceh e sottrarre il numero di rettangolini contenuti nei rettangoli a, c, f, h:
$$NR(6, 2) + NR(6, 1) + NR(2, 4) + NR(3, 4) - NR(2, 2) - NR(3, 2) - NR(2, 1) - NR(3, 1) =$$
$$21 \cdot 3 + 21 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 6 \cdot 10 - 3 \cdot 3 - 6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = 63 + 21 + 30 + 60 - 9 - 18 - 3 - 6 = 138$$
I rettangoli contenuti nel rettangolo $6 \cdot 4$ sono $21 \cdot 10 = 210$. Risposta $210 - 138 = 72$.

- ***Problemi 10.*** *Risposta **0064**.*
I Pyraminx ha quattro facce triangolari, ciascuna divisa in nove piccoli triangoli. Ha 14 pezzi mobili: 4 vertici, 6 spigoli e 4 centri.
Il Megaminx ha un totale di 50 pezzi mobili: $12 \times 5/3 = 20$ vertici e $12 \times 5/2 = 30$ spigoli.
In totale ci sono 64 pezzi mobili.